

MATEMATICĂ · CLASA A V-A

Lecția 14

**Ultima cifră a unei
puteri**

@ianchisflaviu.ro

Ce înseamnă ultima cifră?

348 se termină în 8.

1 225 se termină în 5.

Pentru puteri mari căutăm doar cifra de la final.

La o putere mică putem calcula

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16: \text{ ultima cifră este } 6.$$

Ciclul ultimelor cifre ale lui 2

2^1	2^2	2^3	2^4
2	4	8	6

2^5 se termină din nou în 2. Ciclul are 4 poziții.

Căutăm ultima cifră a lui 2^{33}

Ciclul este 2, 4, 8, 6.

Împărțim exponentul la 4: $33 = 4 \cdot 8 + 1$.

Restul 1 indică prima poziție din ciclu.

Ultima cifră a lui 2^{33} este 2.

Ce ne spune restul?

Rest 1: prima cifră, 2.

Rest 2: a doua cifră, 4.

Rest 3: a treia cifră, 8.

Rest 0: a patra cifră, 6.

Cazul special: restul 0

$100 : 4 = 25$, **rest 0.**

Alegem ultima poziție din ciclul 2, 4, 8, 6.

Ultima cifră a lui 2^{100} este 6.

Contează ultima cifră a bazei

12^{33} și 2^{33} au aceeași ultimă cifră.

La fiecare înmulțire contează doar cifra finală.

Așadar, 12^{33} se termină în 2.

Ciclul pentru puterile lui 3

3^1	3^2	3^3	3^4
3	9	7	1

Apoi cifrele se repetă: 3, 9, 7, 1, ...

Ciclul pentru puterile lui 7

7^1	7^2	7^3	7^4
7	9	3	1

7^5 se termină din nou în 7.

Ciclul pentru puterile lui 8

8^1	8^2	8^3	8^4
8	4	2	6

Și aici ciclul are 4 poziții.

Cicluri de două cifre

$$4^1 \rightarrow 4; 4^2 \rightarrow 6; 4^3 \rightarrow 4; 4^4 \rightarrow 6.$$

$$9^1 \rightarrow 9; 9^2 \rightarrow 1; 9^3 \rightarrow 9; 9^4 \rightarrow 1.$$

Exponent impar: prima cifră. Par: a doua.

Cifre care rămân mereu la fel

0^n se termină în 0, pentru $n > 0$.

1^n se termină în 1.

5^n se termină în 5.

6^n se termină în 6.

Harta ciclurilor

0 : 0 1 : 1 5 : 5 6 : 6

4 : 4, 6 9 : 9, 1

2 : 2, 4, 8, 6 3 : 3, 9, 7, 1

7 : 7, 9, 3, 1 8 : 8, 4, 2, 6

Metoda în trei pași

1. Păstrează ultima cifră a bazei.

2. Scrie ciclul și lungimea lui.

3. Împarte exponentul la lungimea ciclului.

Restul indică poziția; rest 0 înseamnă ultima.

Exemplu: ultima cifră a lui 7^{26}

Ciclul lui 7: 7, 9, 3, 1.

$$26 = 4 \cdot 6 + 2.$$

Restul 2 indică a doua cifră: 9.

Exemplu: ultima cifră a lui 9^{101}

Ciclul lui 9 este 9, 1.

101 este impar: alegem prima cifră.

Ultima cifră este 9.

Exponentul zero

Pentru orice bază nenulă, $a^0 = 1$.

Prin urmare, 123^0 se termină în 1.

0^0 nu este definit în această lecție.

Evităm o greșeală frecventă

$12 : 4 = 3$, **rest 0.**

Pentru 2^{12} alegem poziția a patra.

Ultima cifră este 6, nu 2.

Exersează: început

a) 2^9

b) 2^{12}

c) 5^{48}

d) 6^{73}

Exersează: folosește ciclurile

a) 3^{22}

b) 7^{31}

c) 4^{100}

d) 9^{101}

Exersează: provocare

a) Ultima cifră a lui 12^{33}

b) Ultima cifră a lui $2^{33} + 3^{10}$

c) Ultima cifră a lui $2^{12} \cdot 7^5$

Răspunsuri: început

a) $9 = 4 \cdot 2 + 1$: cifra 2

b) $12 = 4 \cdot 3 + 0$: cifra 6

c) cifra 5

d) cifra 6

Răspunsuri: ciclurile

a) 22 împărțit la 4 dă rest 2: cifra 9

b) 31 împărțit la 4 dă rest 3: cifra 3

c) exponent par: cifra 6

d) exponent impar: cifra 9

Răspunsuri: provocare

a) 12^{33} : aceeași cifră ca 2^{33} , adică 2.

b) $2^{33} \rightarrow 2$, $3^{10} \rightarrow 9$; $2 + 9 = 11$: cifra 1.

c) $2^{12} \rightarrow 6$, $7^5 \rightarrow 7$; $6 \cdot 7 = 42$: cifra 2.