

MATEMATICĂ · CLASA A V-A

Lecția 10

Suma lui Gauss

@ianchisflaviu.ro

O sumă care pare lungă

Cât este $1 + 2 + 3 + \dots + 10$?

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = ?$$

Vom grupa termenii, fără să adunăm unul câte unul.

Facem perechi de la capete

$$1 + 10 = 11$$

$$2 + 9 = 11$$

$$3 + 8 = 11$$

$$4 + 7 = 11$$

$$5 + 6 = 11$$

Cinci perechi egale

Sunt 10 numere, deci formăm 5 perechi.

$$5 \cdot 11 = 55$$

Așadar, $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$.

Metoda merge și când sunt 100 de numere

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

...

$$50 + 51 = 101$$

$$50 \text{ perechi} \cdot 101 = 5\,050$$

O altă privire: scriem suma de două ori

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1$$

Fiecare coloană dă 101.

$$2S = 100 \cdot 101 = 10\,100$$

$$S = 10\,100 : 2 = 5\,050$$

De ce împărțim la 2?

Am scris aceeași sumă de două ori: $S + S = 2S$.

$$2S = 100 \cdot 101$$

Ca să aflăm o singură sumă, împărțim la 2.

Formula pentru primele n numere

Primul și ultimul dau $n + 1$.

Dacă dublăm suma, avem n astfel de perechi.

$$S = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

n este ultimul număr adunat.

Aplicăm formula: până la 21

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 21$$

$$n = 21$$

$$S = 21 \cdot (21 + 1) : 2$$

$$S = 21 \cdot 22 : 2$$

$$S = 231$$

Aplicăm formula: până la 100

$$S = 1 + 2 + \dots + 100$$

$$n = 100$$

$$S = 100 \cdot 101 : 2$$

$$S = 50 \cdot 101$$

$$S = 5\,050$$

Dacă suma începe de la 11

$$11 + 12 + \dots + 81$$

$$= (1 + 2 + \dots + 81) - (1 + 2 + \dots + 10)$$

$$= 81 \cdot 82 : 2 - 10 \cdot 11 : 2$$

$$= 3\,321 - 55$$

$$= 3\,266$$

Numerele pare: scoatem factorul 2

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

$$= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

$$= 2 \cdot (50 \cdot 51 : 2)$$

$$= 50 \cdot 51$$

$$= 2550$$

Sume cu același pas

Șirul $1, 4, 7, \dots, 85$ crește cu 3.

Numărul de termeni: $(85 - 1) : 3 + 1 = 29.$

Primul + ultimul $= 1 + 85 = 86.$

Suma $= 29 \cdot 86 : 2 = 1\,247.$

Regula pentru un șir cu pas constant

Exemplu: $4 + 8 + 12 + \dots$ (34 de termeni).

Ultimul termen: $4 \cdot 34 = 136$.

Suma = (primul + ultimul) · numărul de termeni : 2

$$S = (4 + 136) \cdot 34 : 2 = 2380.$$

Trei pași de ținut minte

1. Găsește primul și ultimul termen.
2. Află câți termeni sunt.
3. Înmulțește numărul de termeni cu
(primul + ultimul) : 2.

Exersează: formula

a) $1 + 2 + \dots + 21$

b) $1 + 2 + \dots + 100$

c) $70 + 69 + \dots + 1$

Exersează: schimbăm începutul sau pasul

a) $11 + 12 + \dots + 81$

b) $2 + 4 + 6 + \dots + 100$

c) $5 + 10 + 15 + \dots + 400$

Exersează: provocare

a) $1 + 4 + 7 + \dots + 85$

b) $4 + 8 + 12 + \dots$ **(34 de termeni)**

c) $21 + 22 + \dots + 40$

Răspunsuri: formula

a) $21 \cdot 22 : 2 = 231$

b) $100 \cdot 101 : 2 = 5\,050$

c) $70 \cdot 71 : 2 = 2\,485$

Răspunsuri: Început și pas

a) $81 \cdot 82 : 2 - 10 \cdot 11 : 2 = 3\,266$

b) $2 \cdot (50 \cdot 51 : 2) = 2\,550$

c) $5 \cdot (80 \cdot 81 : 2) = 16\,200$

Răspunsuri: provocare

a) 29 termeni; $29 \cdot (1 + 85) : 2 = 1\,247$

b) ultimul 136; $34 \cdot (4 + 136) : 2 = 2\,380$

c) 20 termeni; $20 \cdot (21 + 40) : 2 = 610$